Teorema das 4 equivalências

Prof. Gustavo Adolfo

Resumo

Teorema: Seja $\vec{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (n=2.3) um campo vetorial de classe C^1. Se $\vec{F}$ é conservativo, então $rot\ \vec{F} = 0$. Para determinadas condições de D, a recíproca é verdadeira, ou seja, $rot\ \vec{F} = 0$ implica que $\vec{F}$ é conservativo. As condições para D são as seguintes:

1) D é aberto.

2) D é conexo. O que significa que dados dois pontos quaisquer na região é possível ligar estes dois pontos por uma curva inteiramente contida em D.

3) D é "sem buracos" , o que significa que qualquer região tomada no interior de D pertence à região D.

Um conjunto que satisfaça simultaneamente os casos acima é chamado de **simplesmente conexo**.

Seja $\vec{F} = (P, Q) : D \subset \mathbb{R}^2\mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1. Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto simplesmente conexo, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ em D;

2) $\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = 0,$ qualquer que seja a curva fechada C em D;

3) $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ não depende do caminho de C em D;

4) $\vec{F}$ é conservativo

Exemplo: Considere a curva C dada por $\sigma(t) = (-cos\ \frac{\pi}{t}, e^{t-1})$, tal que $1 \leq t \leq 2$. Calcule $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ onde $\vec{F}(x, y) = (-y^2\ sen\ x, 2y\ cos\ x)$

A curva C é simplesmente conexa. Temos que $P(x, y) = -y^2\ sen\ x$ e $Q(x, y) = 2y\ cos\ x$

Ao fazermos as derivadas parciais temos que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -2y\ sen\ x$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2y\ sen\ x$$

ou seja, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ e a condição de equivalência 1 é satisfeita. A validade de uma das condições valida todas as outras. Pela condição 3 de equivalência, a integral de linha não depende do caminho traçado, dependendo apenas do pontos inicial e final. O intervalo do parâmetro t é $1 \leq t \leq 2$, que aplicando na equação paramétrica da curva permite obter os pontos iniciais e finais

$$t = 1 \Rightarrow \sigma(1) = (1, 1)$$

$$t = 2 \Rightarrow \sigma(2) = (0, e)$$

Os pontos estão mostrados no plano da Figura 1. Como a integral independe do caminho, segundo a condição 3 de equivalência, escolhemos um caminho mais simples que ligue os pontos inicial e final. O caminho são os dois segmentos de reta mostrados na Figura 1. O segmento horizontal é C1 e o vertical C2.

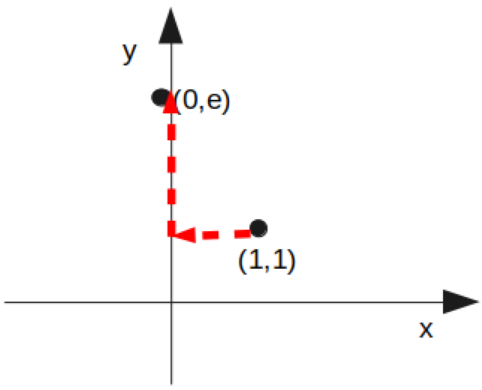

Figura 1: Pontos inicial e final da curva σ

para C1:

$$\int_1^0 P(x,y)\,dx = -\int_0^1 -sen\ x\,dx = \int_0^1 sen\ x\,dx = -cos1 + 1$$

para C2:

$$\int_1^e Q(x,y)\,dy = \int_1^e 2y\,dy = e^2 - 1$$

e a integral de linha total é a soma das integrais em C1 e C2:

$$\oint_C = \vec{F}.\vec{dr} = -cos\ 1 + 1 + e^2 - 1 = e^2 - cos\ 1$$

Outra forma de resolução é usar a condição de equivalência 4, que define que o campo é conservativo. Buscamos então uma função potencial γ de forma que:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = -y^2 sen\ x \Rightarrow y^2 cos\ x + f(y) = \gamma(x, y)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = 2ycos\ x \Rightarrow y^2 cos\ x + g(x) = \gamma(x, y)$$

comparando as duas expressões, temos que f(y) = g(x) = 0 e $\gamma(x, y) = y^2 cos\ x$

pelo teorema fundamental do cálculo para integrais de linha

$$\oint_C \vec{F}\vec{dr} = \gamma(\sigma(2)) - \gamma(\sigma(1))$$
$$= \gamma(0, e) - \gamma(1, 1) = e^2 - cos\ 1$$

Cálculo de uma integral de linha pelo Teorema das 4 equivalências

Seja $I = \int_C (kxe^y + y)dx + (x^2e^y + x - ky)dy\ , k \in (R)$

Qual valor k assume para que a integral I seja independente do caminho ?

Uma vez que a integral i independe do caminho, o campo é conservativo. Como o domínio é simplesmente conexo, essa é a condição de equivalência 3. Para um campo conservativo num domínio simplesmente conexo, $rot\ \vec{F} = 0$. Valem também as outras condições de equivalência. Da equivalência 1, temos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Aplicando essa relação, temos que

$$2xe^y + 1 = kxe^y + 1 \Rightarrow 2xe^y = kxe^y \Rightarrow k = 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Desejamos agora calcular $I = \int_C (2xe^y + y)dx + (x^2e^y + x - 2y)dy$ no caminho do ponto A(0,0) até o ponto B(1,1).

Uma vez que k=2, o campo é conservativo e pode ser resolvido encontrando uma função potencial $\gamma(x, y)$. Assim

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = 2xe^y + y \Rightarrow \gamma(x, y) = x^2e^y + xy + f(y) = \gamma(x, y)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = x^2e^y + x - 2y \Rightarrow \gamma(x, y) = x^2e^y + xy + f(y) = \gamma(x, y)$$

comparando as duas expressões, temos que $\gamma(x, y) = x^2e^y + xy - y^2$

$$\int_C \vec{F}d\vec{r} = \gamma(B) - \gamma(A)$$

$$= \gamma(1, 1) - \gamma(0, 0) = e$$